

大作业二

1. 令 S^1 为 \mathbb{R}^2 中单位圆。证明： $|[0, 1]| = |S^1|$ 。

2. 证明：若 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ 和 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ 是 \mathbb{Q} 上的两个柯西列，证明 $\{a_n \cdot b_n\}_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ 也是 \mathbb{Q} 上的一个柯西列。

【本题为课件 [Part 4] 中第11页的最后一个练习。当时的上下文是通过对 \mathbb{Q} 做完备化来得到 \mathbb{R} 。换言之，在解答本题时，我们没有实数 \mathbb{R} 的定义，更没有实数 \mathbb{R} 上关于关于数列收敛的柯西准则。本题的要求是：仅仅基于柯西列的定义，证明两个柯西列的“乘积”仍然是个柯西列。】

3. 证明自由群 \mathbb{F}_2 包含可数多个元素。